



Метод Расщепления По Физическим Про-Цессам С Использованием Преобразования Фурье (Ssft) Для Точной Характеристики Распространения Солитонов В Оптическом Волокне С Потерями

Тайланов Н. А.

Джизакский государственный педагогический институт, Джизак, Узбекистан

Уринов С. Х.

Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан

Received 4th Apr 2023, Accepted 6th May 2023, Online 16th Jun 2023

Аннотация: В этой статье мы представляем численный подход расщепления по физическим процессам с использованием преобразования Фурье (SSFT) для решения одномерного нелинейного уравнения Шредингера (NLSE), которое включает в себя термин потерь в волокне. Хотя это основное уравнение определяет распространение импульса в оптическом волокне с потерями, оно не поддерживается точным аналитическим решением. Основываясь на этом, численные результаты MATLAB подтверждают, что численный подход расщепления по физическим процессам с использованием преобразования Фурье (SSFT) демонстрирует превосходную производительность по сравнению с другими предложенными схемами при моделировании распространения солитонов в оптическом волокне с потерями.

Ключевые слова: нелинейное уравнение Шредингера (NLSE), численный подход расщепления по физическим процессам, оптические волокна, псевдоспектральный метод Фурье.

Введение

Уравнения в частных производных — широко используемый математический аппарат при разработке моделей в различных областях науки и техники. К сожалению, явное решение этих уравнений в аналитическом виде возможно только в частных простых случаях, и, как следствие, возможность анализа математических моделей обеспечивается путем решения этих уравнений приближенными численными методами. В последние годы нелинейные эволюционные уравнения стали очень активной областью для описания различных областей нелинейных наук. Одномерное нелинейное уравнение Шредингера (1D NLSE) является классическим уравнением поля. Его наиболее выдающиеся приложения связаны с распространением световых волн в оптических волокнах и планарных волноводах наряду со многими другими [1]. В частности, 1D NLSE представляет собой нелинейное уравнение в частных производных второго порядка, применимое как к классической, так и к квантовой механике. Нелинейное уравнение Шредингера обладает чрезвычайно высокой универсальностью и применяется для описания волновых процессов во многих областях физики: в теории поверхностных волн [1], в моделях эволюции распределений

плазменных колебаний [2], нелинейной оптике [3], биофизике и т. д.. Нелинейное уравнение Шредингера описывает распространение нелинейных ленгмюровских волн, волн в глубокой воде; волны в линиях передачи, акустические волны в жидкостях с пузырьками и, прежде всего, распространение оптического излучения в нелинейных средах. Типичным применением нелинейного уравнения Шредингера является динамика оптических импульсов в оптическом волокне. Эволюция во времени огибающей оптического импульса в волокне хорошо аппроксимируется нелинейным уравнением Шредингера, включая описание очень длинных трансокеанских оптических линий связи, см., например, [4, 5].

Рассматриваемое нелинейное уравнение Шредингера является нелинейным дифференциальным уравнением с частными производными, которого в общем случае нельзя решить аналитически. Поэтому при решении данной задачи применяются методы численного моделирования. Используемые для решения уравнений распространения численные методы можно разделить на два класса: псевдоспектральные методы и конечно-разностные схемы. В общем случае псевдоспектральные методы оказываются на порядок быстрее, чем разностные схемы, при той же точности счёта [6]. Наиболее распространённым методом решения уравнений является метод расщепления по физическим процессам с использованием преобразования Фурье на линейном шаге (Split-Step Fourier Method, SSFM) [7, 8]. Данный метод прост в реализации, быстр и имеет высокую точность по временной переменной. Большая скорость счёта метода расщепления достигается благодаря использованию алгоритма быстрого преобразования Фурье [9].

1. Методология.

В этой статье представлен численный подход с расщепленным шагом преобразования Фурье (SSFT) для решения одномерного нелинейного уравнения Шредингера (NLSE). Этот впечатляющий численный метод необходим для понимания нелинейности волоконной оптики, поскольку в этом процессе представлены как дисперсия, так и нелинейные эффекты. Именно его можно эффективно использовать для моделирования распространения световых импульсов в оптическом волокне на короткое расстояние h . В дополнение к этому полезно учитывать его преимущество в виде более быстрого подхода, особенно по сравнению с подходом конечных разностей. В частности, 1D NLSE представляет собой нелинейное уравнение в частных производных второго порядка, применимое как к классической, так и к квантовой механике. Это можно записать следующим образом [2]:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \gamma |\psi|^2 \psi, \quad (1)$$

$$\psi(x, 0) = \psi_0(x) \quad (2)$$

Переставляя члены уравнения (1) в виде

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = (L + N)\psi, \quad (3)$$

Предположим, что линейный оператор равен $L = i \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, а нелинейный оператор равен $N = \gamma i |\psi|^2$.

Затем мы разделили его на две части, чтобы решить проблему следующим образом. Часть первая, нелинейный шаг вводится как: $\frac{\partial \psi}{\partial t} = N\psi$, где $N = \gamma i |\psi|^2$. Следовательно, аналитическое решение будет иметь следующий вид:

$$\psi(x, t + \tau) = \exp(i \tau N) \psi = \exp(i \tau \gamma |\psi|^2) \psi. \quad (4)$$

Часть вторая, линейный шаг вводится, поскольку $i \frac{\partial \psi}{\partial t} = L \psi$. мы применяем преобразование Фурье к обеим сторонам, чтобы преобразовать PDE в ODE в частотной области, чтобы облегчить его решение, следующим образом:

$$i \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial t} = -ik^2 \hat{\psi}. \quad (5)$$

Уравнение (5) демонстрирует аналитическое решение предыдущего уравнения, но вычисленное в частотной области:

$$\hat{\psi}(x, t + \tau) = \exp(-ik^2 \tau) \hat{\psi}. \quad (6)$$

при дискретизации производной по времени первого порядка с использованием соответствующего соотношения конечных разностей. В конце концов, мы применяем обратное преобразование Фурье к обеим частям, чтобы получить окончательное уравнение, представленное ниже [7]:

$$\hat{\psi}(x, t + \tau) = F^{-1}(\exp(-ik^2 \tau) \cdot F(\exp(i \tau \gamma |\psi|^2) \psi)). \quad (7)$$

2. Численные результаты

В этом разделе проводится множество обозначенных численных примеров, чтобы проверить, насколько эффективными, быстрыми и точными являются предлагаемые численные методы, особенно по сравнению с точным аналитическим решением. В частности, программное обеспечение MATLAB использовалось для запуска этих тестов, которые выполнялись для измерения точности различных численных подходов, оценки ошибки и выбора наиболее надежного и быстрого подхода для решения одномерной NLSE. Во всех предложенных методах NLSE решается дискретно при различных значениях времени и пространства [9]. Для численного эксперимента мы дискретизируем пространственную область x от -10 до 10, задавая параметры в уравнении (1), соответственно. Это приводит к гиперболическому секущему начальному условию [10]:

$$\hat{\psi}(x, 0) = \sqrt{2} \exp\left(\frac{i}{2} x\right) \cdot \text{sech } x. \quad (8)$$

Связанные с нулевыми граничными условиями показаны ниже:

$$\psi(L, t) = 0, \quad \psi(-L, t) = 0. \quad (9)$$

происходит в $x = -L, L$ для $t > 0$. Мы нанесли решение, полученное с помощью наших численных методов, в пространственной области x от -10 до 10 и во временной области t от 0 до 1 с использованием различных пространственных шагов $\Delta x = 0.1 \div 1$ при временном шаге $\Delta t = 0.001$, вычислено в момент времени $t = 0.1 \div 1$. Наша стратегия моделирования заключается в использовании различных пространственных шагов h при фиксированных других параметрах, а затем в адаптации различных временных шагов T без изменения остальных параметров. Размеры этих шагов безразмерны, и их значения определяют точность эксперимента. В частности, чем меньше их значения, тем точнее становится приближенное численное решение. На рис. 1-3 показаны графики точного яркого односолитонного решения в трех измерениях, чтобы во время процесса сравнения точно сфокусировать внимание на фактической форме этого импульса.

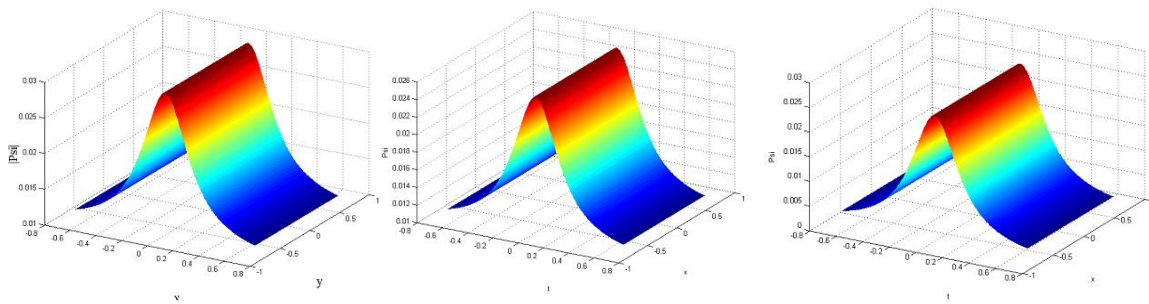


Fig.1. A 3D graph of approximate numerical solution of 1D NLSE using the split-step Fourier transform (SSFT) approach $t = 0.1, 0.2, 0.3$.

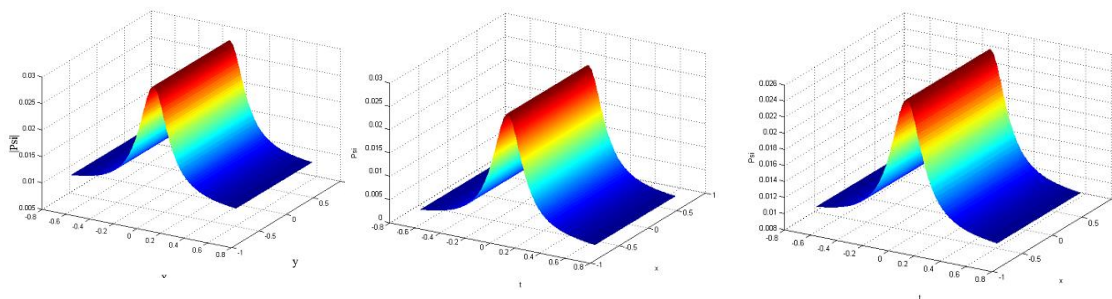


Fig.1. A 3D graph of approximate numerical solution of 1D NLSE using the split-step Fourier transform (SSFT) approach (a) $t = 0.4, 0.5, 0.6$.

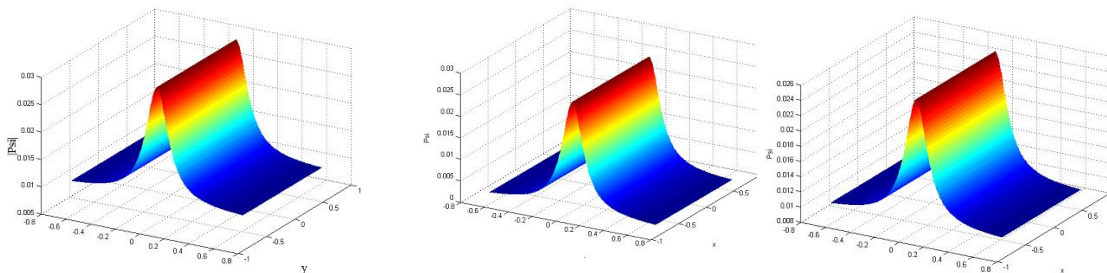


Fig.3. A 3D graph of approximate numerical solution of 1D NLSE using the split-step Fourier transform (SSFT) approach (a) $t = 0.7, 0.8, 1$.

Согласно результатам, представленным на этих рисунках, метод расщепления по физическим процессам с использованием преобразования Фурье обеспечивает высокую точность численных решений нелинейного уравнения Шредингера. С другой стороны, как видно из рисунков, результат, полученный по неявной экспоненциальной разностной схеме, имеет лучшие результаты, чем результаты, полученные по другим численным схемам. Эти расчеты показывают, что точность решений достаточно высока даже в случае небольшого числа узлов сетки.

Заключение

В данном исследовании рассматривается метод расщепления по физическим процессам с использованием преобразования Фурье для численного моделирования нелинейного уравнения Шредингера. Приближенные решения нелинейного уравнения Шредингера получены с помощью программы Matlab. Показано, что предлагаемый метод значительно увеличивает вычислительные затраты. Это улучшение становится более значительным, особенно для больших временных эволюций.

Литература

1. Захаров В. Е. Устойчивость периодических волн конечной амплитуды на поверхности глубокой жидкости. ЖПМТФ. 1968. Т. 6, № 3. С. 86-94.
2. Кадомцев Б. Б. Коллективные явления в плазме. М.: Наука, 1988. 304 с.
3. Ахманов С. А., Сухоруков А. П., Хохлов Р. В. Самофокусировка и дифракция света в нелинейной среде. УФН. 1967. Т. 93, № 1. С. 19-70.
4. Агравал Г.П. , Нелинейная волоконная оптика, Academic Press, 2007.
5. Лушников П.М. Полностью параллельный алгоритм моделирования волоконно-оптических систем с мультиплексированием по длинам волн и управляемой дисперсией, Опт. Лётт . 27 (11) (2002) 939–941.
6. Taha, T. R. Analytical and numerical aspects of certain nonlinear evolution equations. II. Numerical, nonlinear Schrodinger equation. Journal of Computational Physics. — 1984.—Vol. 55, No. 2. —P. 203-230.
7. Hardin, R. H. Applications of the split-step Fourier method to the numerical solution of nonlinear and variable coefficient wave equations. SIAM Review Chronicle. — 1973.—Vol. 15. — P. 423.
8. Fisher, R. A. The role of linear dispersion in plane-wave self-phase. Applied Physics Letters. — 1973. — Vol. 23, No. 12.—P. 661.
9. Cooley, J. W. An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. Mathematics of Computation. — 1965.—Vol. 19, No. 90. —P. 297-301.